

## La prueba del Nueve

Para mostrar la razón del funcionamiento de esta prueba (conocida también como "Casting out nines", o "Eliminación de nueves") necesitaremos algunas ideas previas de congruencias.

$$\text{Sea } N = 10^n * a_n + 10^{n-1} * a_{n-1} + \dots + 10^1 * a_1 + 10^0 * a_0 \quad (1)$$

Siendo N un número entero, y  $a_i$  las cifras del número en su representación decimal.

Como sabemos,

$$10 \equiv 1 \pmod{9} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$
$$10^k \equiv 1 \pmod{9}$$

Llamaremos  $S_N$  a la suma de las cifras del número en su representación decimal, es decir

$$S_N = \sum_{i=0}^n a_i$$

Y por lo definido en (1), es fácil ver que

$$S_N \equiv N \pmod{9}$$

Iterando el proceso, tendríamos

$$S_N \equiv S_{S_N} \pmod{9}$$
$$S_{S_N} \equiv S_{S_{S_N}} \pmod{9}$$

*etc*

Hasta constatar que  $S_N$  es congruente, módulo nueve, con el resto de la división de N por nueve, cuando logramos que la suma de las cifras sea un número menor o igual a nueve. De paso, esto tiene que ver con la explicación de por qué un número cuyas cifras suman nueve o un múltiplo de nueve, es divisible por nueve, y viceversa.

**Y la prueba...**

Sean N y M, definidos como anteriormente. Tendremos que

$$N \equiv S_N \pmod{9}$$

$$M \equiv S_M \pmod{9}$$

↓

$$N * M \equiv S_N * S_M \pmod{9}$$

Y con ello, por ser  $N * M \equiv S_{N*M} \pmod{9}$

$$S_{N*M} \equiv S_N * S_M$$

Si a alguien no le parece muy creíble lo expuesto anteriormente:

Sean  $N = 9k + r$ ,  $M = 9j + s$

$$M * N = 9 * (9kj) + 9ks + 9jr + rs$$

$$M * N = 9 * (9kj + ks + jr) + rs$$

Y con ello,  $M * N \equiv rs \pmod{9}$

De esta manera, si la división (o la multiplicación) esta hecha correctamente, debe darse el resultado pedido, siempre que entendamos, claro está, que estamos trabajando módulo 9.

Ahora el problema inverso: si se da el resultado, ¿está bien hecha la multiplicación?

La respuesta es: no necesariamente. Hay dos casos que la prueba es incapaz de detectar:

- a) La transposición de dos cifras en distintas posiciones (por ejemplo, 138 y 183)
- b) El cambio de nueve por cero, o viceversa)

El primer caso tiene que ver con la conmutatividad de la suma. La segunda, con el hecho de que en módulo nueve, 0 y 9 son congruentes. Por las dudas, vayan dos ejemplos.

- i)  $1911 : 13 = 147$   
Verificando con la prueba del nueve:  $1+9+1+1 = 12 = 1+2 = 3$   
 $1+3 = 4$   
 $1+4+7 = 12 = 1+2 = 3$

Luego,  $13*147 = 4*3 = 12 = 1+2 = 3$ . Se verifica que está bien hecha. Sin embargo

$$1911 : 13 = 174$$

Esta vez la división no está bien hecha, y sin embargo,  $1+7+4 = 12 = 1+2 = 3$

Comprobando,  $13*174 = 4*3 = 12 = 1+2 = 3$ . ¡Según la prueba del nueve, estaría bien hecha!

- ii)  $147*13 = 1911$ . La multiplicación está bien hecha. Sin embargo,

$147*13 = 1011$ . Verificando con la prueba del nueve:  $1+4+7 = 12 = 1+2 = 3$   
 $1+3 = 4$   
 $1+0+1+1 = 3$

Comprobando,  $147*13 = 3*4 = 12 = 1+2 = 3$  ¡Nuevamente nos traiciona la prueba del nueve!

En definitiva, la prueba del nueve nos advierte cuando una multiplicación está mal hecha, pero que resulte no es una prueba de que esté bien realizada.

## Algunas extensiones

Considerando las advertencias ya hechas respecto a los casos que la prueba del nueve no detecta, tenemos que:

$$N + M \equiv S_N + S_M \pmod{9}$$

$$S_{N+M} \equiv S_N + S_M \pmod{9}$$

Una forma de constatar que la suma esté bien hecha. En realidad, comprobarla artesanalmente puede ser más práctico)

División con resto

$$A = K * B + R$$

$$S_A \equiv S_{K*B} + S_R \pmod{9}$$

$$S_A \equiv S_K * S_B * S_R \pmod{9}$$

## Anexo

Lo que fundamenta esta regla es el criterio de divisibilidad por nueve, o decir que la suma de las cifras de un número es congruente, módulo nueve, con el resto por la división por nueve del mismo número. Propongo la extensión de este hecho a cualquier base en que deseemos representar un número.

Demostración

Sea  $p$  la base elegida, con  $p \in \mathbb{N}$ . De esta manera,  $M$  se representa como

$$N = p^n * a_n + p^{n-1} * a_{n-1} + \dots + p^1 * a_1 + p^0 * a_0$$

Tenemos, por otra parte, que

$$p \equiv 1 \pmod{p-1}$$

$$p^k \equiv 1 \pmod{p-1}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

Luego,

$$N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{p-1}$$

Con esto, en cualquier base  $p$  que escojamos, **un número será divisible por  $p-1$  si, y sólo si, la suma de las cifras que le representan en esa base es congruente con cero, módulo  $p-1$ .**

Podemos ver este asunto de una manera un poco más algebraica, Representemos el número de la misma manera, con un pequeño truco:

$$\begin{aligned}
N &= ((p^n - 1) + 1) * a_n + ((p^{n-1} - 1) + 1) * a_{n-1} + \dots + ((p^1 - 1) + 1) * a_1 + ((p^0 - 1) + 1) * a_0 \\
N &= (p^n - 1) * a_n + (p^{n-1} - 1) * a_{n-1} + \dots + (p^1 - 1) * a_1 + (p^0 - 1) * a_0 + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \\
&= (p^n - 1) * a_n + (p^{n-1} - 1) * a_{n-1} + \dots + (p^1 - 1) * a_1 + (p^0 - 1) * a_0 + S_N \\
&\quad \text{pero } p^0 - 1 = 0. \text{ Con ello} \\
N &= (p^n - 1) * a_n + (p^{n-1} - 1) * a_{n-1} + \dots + (p^1 - 1) * a_1 + S_N
\end{aligned}$$

Como  $(p^k - 1) = (p - 1) * (p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + p + 1)$  siempre es divisible por  $p - 1$ . Luego

$$(p - 1) \mid N \leftrightarrow (p - 1) \mid S_N$$

Pedro Rupin Gutiérrez  
Licenciado en Matemáticas  
Profesor de Matemáticas  
Pontificia Universidad Católica  
Santiago de Chile